Der Satz ist bewiesen, wenn man zeigen kann, daß es dann auch zu jedem $\varepsilon' > 0$ ein $A'(\varepsilon')$ gibt, so daß

$$\left| \int_a^b \frac{f(y)}{\omega(y,x)} \, \mathrm{d}y \right| < \varepsilon' \quad \text{für } b > a \geq A'(\varepsilon') .$$

Beweis: Auf Grund des zweiten Mittelwertsatzes[5] ist für ein $a \leq \xi \leq b$

$$\int_a^b \frac{f(y)}{\omega(y,x)} \, \mathrm{d}y = \int_a^b \frac{f(y)}{\sqrt{y+x_0}} \, g(y,x) \, \mathrm{d}y$$

$$= g(a,x) \int_0^\xi \frac{f(y)}{\sqrt{y+x_0}} \, \mathrm{d}y + g(b,x) \int_\xi^b \frac{f(y)}{\sqrt{y+x_0}} \, \mathrm{d}y$$

und daher auf Grund der Voraussetzung

$$\left| \int_a^b \frac{f(y)}{\omega(y,x)} \, \mathrm{d}y \right| < 2 \, \varepsilon M(x, x_0) ,$$

und das ist $< \varepsilon'$, wenn man $A' = A(\varepsilon'/2M)$ wählt.

Da $\omega(y,x) = (y+x)^{n+1/2}$ für $x > 0$ die Voraussetzungen des Satzes 1 erfüllt, gilt:

Satz 2: Unter den gleichen Voraussetzungen für $f(y)$ wie in Satz 1 existiert

$$U_n(x) = \int_0^{\to\infty} \frac{f(y)}{(y+x)^{n+1/2}} \, \mathrm{d}y$$

für alle $n \geq 0$ und alle $x \geq 0$.

Auf analoge Weise beweist man, daß $U_n(x)$ auch für alle komplexen x mit Ausnahme der negativ reellen Werte existiert.

Es seien $U_1(x)$, $f_1(x)$ und $U_2(x)$, $f_2(x)$ zwei Paare von Funktionen, die (6) genügen. Wir schreiben (6) für $f_1(y)$ an, multiplizieren mit $f_2(x)$ und integrieren über x:

$$\int_0^\infty U_1(x) \, f_2(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^\infty f_2(x) \int_0^\infty \frac{f_1(y)}{\sqrt{y+x}} \, \mathrm{d}y .$$

Hier darf man rechts die Reihenfolge der Integrationen vertauschen, vorausgesetzt, daß $\int_0^\infty |f_2(x)| \, \mathrm{d}x$ existiert, und man erhält

$$\int_0^\infty U_1(x) \, f_2(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^\infty U_2(x) \, f_1(x) \, \mathrm{d}x .$$

Die Voraussetzungen für $f_2(y)$ sind erfüllt für das Paar (2) der Tab. 1. Wir bekommen dann rechts (für $C = 1$) das Integral

$$\int_0^\infty f_1(x)/(1+\sqrt{x}) \cdot \mathrm{d}x ,$$

welches nach Satz 1 existiert. Es gilt also

Satz 3: Wenn (6) eine Lösung hat, dann existiert das Integral

$$\int_0^\infty U(x)/(1+x)^{3/2} \cdot \mathrm{d}x .$$

[5] Vgl. Mangold-Knopp, Höhere Mathematik III, S. 155, Stuttgart 1948.

Über die Bewegung geladener Teilchen in schwach veränderlichen Magnetfeldern

Von Gerhard Hellwig

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

(Z. Naturforschg. **10a**, 508—516 [1955]; eingegangen am 2. Mai 1955)

Die Alfvénschen Näherungsgleichungen in schwach veränderlichen Magnetfeldern werden auf eine Weise hergeleitet, die eine Fallunterscheidung (grad H senkrecht oder parallel zu $\mathfrak{H}$) erübrigt und sowohl eine Verallgemeinerung auf den relativistischen Fall als eine Erweiterung auf höhere Näherungen zuläßt. Es wird gezeigt, daß die zeitliche Änderung von M (durch die „spiralende" Bewegung des Teilchens erzeugtes magnetisches Moment) bei verschwindender Rotation der mechanischen Kräfte auch noch in zweiter Näherung verschwindet. Zum Schluß wird auf einen Einwand A. Schlüters gegen die Fermische Theorie der Nachbeschleunigung von Höhenstrahlteilchen eingegangen.

Einleitung

Die Bahn eines geladenen Teilchens in einem magnetischen Feld ist bei vorgegebener Anfangsgeschwindigkeit und -lage vollständig festgelegt durch die Bewegungsgleichung

$$m \ddot{\mathfrak{r}} = \frac{e}{c} [\dot{\mathfrak{r}} \, \mathfrak{H}(\mathfrak{r})] . \qquad \text{(E, 1)}$$

Um sich bei einem gegebenen Magnetfeld $\mathfrak{H}$ einen Überblick zu verschaffen über die zu verschiedenen Anfangsbedingungen gehörenden Bahnen, ist man darauf angewiesen — abgesehen von den wenigen Fällen, wo man die Differentialgleichung explizit lösen kann —, diese numerisch zu integrieren. Da diese numerische Integration jedoch im allgemeinen Fall außerordentlich mühevoll ist, ist man bemüht, für möglichst viele und möglichst umfangreiche Spezialfälle die Bewegungsgleichung derart umzuformen, daß eine numerische Behandlung erleichtert wird und man womöglich einen gewissen Überblick über die Lösungen ohne jede Rechnung gewinnt. In diesem Sinne wurde z.B. von Störmer[1] die Bewegung in magnetischen Dipolfeldern behandelt.

In der vorliegenden Arbeit wird die Bewegung in nahezu homogenen Magnetfeldern untersucht. Alfvén[2, 3] hat diesen Fall, der in der Astrophysik ein gewisses Interesse beanspruchen darf, als erster behandelt und entsprechende Näherungsgleichungen angegeben.

Es wird sich zeigen, daß man die Bahn des Teilchens durch eine Art „Variation der Konstanten" aus einer Bahn im homogenen Magnetfeld gewinnen kann. Hier jedoch sei das Problem in einer mehr anschaulichen Weise behandelt[4].

Man ordnet nach Alfvén dem Teilchen, das in dem Magnetfeld eine „spiralende" Bahn beschreibt, ein „Ersatzteilchen" zu, das nicht an der spiralenden Bewegung des wirklichen Teilchens teilnimmt, sondern nur an dessen systematischem Bewegungsanteil. Von vornherein auf eine genauere Kenntnis der wirklichen Bahn verzichtend, begnügt man sich damit, eine mittlere Bahn, nämlich die Bahn dieses Ersatzteilchens, zu bestimmen. Dem Ersatzteilchen hat man außer Masse und Ladung auch ein magnetisches Moment ($\mathfrak{M}$) zuzuordnen, da das wirkliche Teilchen durch seine kreisende Bewegung ein solches repräsentiert.

Das Moment eines Kreisstromes i, der eine Fläche f umrandet, ist

$$M = \frac{1}{c}\, i\, f.$$

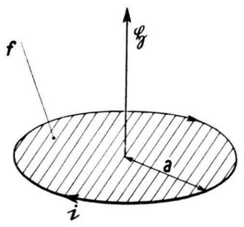

Abb. 1. Bezeichnungen an der kreisförmigen Teilchenbahn.

Hier ist $i = e\omega/2\pi$ mit $\omega = eH/mc$ und $f = \pi a^2$ zu setzen (vgl. Abb. 1). Da außerdem die Richtung von $\mathfrak{M}$ stets, d. h. unabhängig vom Vorzeichen der Ladung, die *negative* Feldrichtung ist, ist also das Moment des Ersatzteilchens

$$M = \frac{e}{2\,c}\,\omega\, a^2 \tag{E, 2}$$

und

$$\mathfrak{M} = -M\mathfrak{h}, \tag{E, 2a}$$

wenn $\mathfrak{h}$ der Einheitsvektor in Feldrichtung ist. Auf das magnetische Moment übt die Inhomogenität des Magnetfeldes eine Kraft

$$\mathfrak{K}^{(\mathrm{mag})} = \operatorname{grad}\,(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{H}) \tag{E, 3}$$

aus. ($\mathfrak{M}$ wird von der Differentiation nicht betroffen.) Einsetzen von Gl. (2a)* in Gl. (3) ergibt:

$$\mathfrak{K}^{(\mathrm{mag})} = -M\,\operatorname{grad} H. \tag{E, 3a}$$

Ein magnetisches Moment läßt sich auf zwei verschiedene Arten repräsentieren. Erstens als infinitesimale Doppelschicht „magnetischer Ladungen" und zweitens als infinitesimaler Kreisstrom. Da sich das Magnetfeld in beiden Fällen nicht voneinander unterscheidet, sollte man erwarten, daß auch die Kraft, die auf $\mathfrak{M}$ in einem äußeren Magnetfeld $\mathfrak{H}_a$ wirkt, gleich ist,

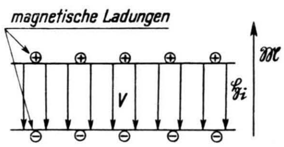

Abb. 2. Darstellung eines magnetischen Momentes durch eine Doppelschicht magnetischer Ladungen.

da man diese durch die Maxwellschen Spannungen auf einer das Moment umschließenden Fläche beschreiben kann. Tatsächlich ergibt aber die formale Berechnung dieser Kraft, ausgehend von der Kraft auf eine magnetische Ladung, im ersten Fall ($\mathfrak{M}$ grad) $\mathfrak{H}_a$, und im zweiten Fall, ausgehend von der Kraft auf ein Stromelement, grad ($\mathfrak{M}\mathfrak{H}_a$). Der scheinbare Widerspruch klärt sich durch die Bemerkung auf, daß im ersten Fall zu der Kraft ($\mathfrak{M}$ grad) $\mathfrak{H}_a$ noch diejenige Kraft hinzugefügt werden muß, die das innere Feld $\mathfrak{H}_i$ auf den Feld erzeugenden Strom $\mathfrak{j}_a$ ausübt (vgl. Abb. 2), wenn man die durch die Maxwellschen Spannungen ausgedrückte Kraft erhalten will. Diese Kraft ist $1/c[\mathfrak{j}_a\,\mathfrak{H}_i]\cdot V$, wenn V das von den Platten umfaßte Volumen bedeutet. Wegen

[1] Vgl. insbesondere: C. Störmer, On the trajectories of electric particles in the field of a magnetic dipol with applications to the theory of cosmic radiation. Astrophysica Novegica Vol. II No. 1. 5. communication.

[2] H. Alfvén, On the motion of a charged particle in a magnetic field, Ark. Mat. Astr. Fys. **27**, A No 22 (1940).

[3] H. Alfvén, Cosmical Electrodynamics. Oxford 1950, p. 13 ff.

[4] Auf den von Alfvén behandelten allgemeineren Fall, daß außer der magnetischen eine beliebige nichtmagnetische Kraft auf das Teilchen wirkt, gehen wir in Paragraph 1 ein.

* Gleichungsnummern ohne Paragraphenhinweis beziehen sich auf den laufenden Paragraphen.

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H}_a = \frac{4\pi}{c}\, \mathfrak{j}_a \text{ und } \mathfrak{H}_i = -4\pi\, \mathfrak{M}/V$$

wird die fragliche Kraft $[\mathfrak{M} \operatorname{rot} \mathfrak{H}_a]$. Da

$$(\mathfrak{M} \operatorname{grad})\, \mathfrak{H}_a + [\mathfrak{M} \operatorname{rot} \mathfrak{H}_a] = \operatorname{grad}(\mathfrak{M}\, \mathfrak{H}_a)$$

ist, ist der scheinbare Widerspruch tatsächlich beseitigt.

Sei $\mathfrak{R}$ der Ort des Ersatzteilchens, so haben wir die „nichtspiralende" Lösung der Dgl.

$$m\, \ddot{\mathfrak{R}} = \frac{e}{c} [\dot{\mathfrak{R}}\, \mathfrak{H}(\mathfrak{R})] - M \operatorname{grad} H \qquad \text{(E, 4)}$$

zu suchen. Diese Dgl. hat jedoch im allgemeinen keine Lösung, die innerhalb beliebig großer Zeitintervalle nicht spiralt. Die gesuchte Lösung kann deshalb nur durch die Forderung festgelegt werden, daß sie innerhalb eines möglichst großen Zeitintervalles — von der Anfangszeit an gerechnet — nicht spiralen soll. Diese Lösung genügt näherungsweise der Dgl. erster Ordnung

$$\dot{\mathfrak{R}} = \alpha\, \mathfrak{h} + \frac{c}{eH} [\mathfrak{h}\, \{M \operatorname{grad} H + m\, \alpha\, \dot{\mathfrak{h}}\}] \qquad \text{(E, 5)}$$

mit

$$m\, \dot{\alpha} = -M\, (\mathfrak{h} \operatorname{grad} H). \qquad \text{(E, 5a)}$$

Außerdem kann man in konsequenter Näherung $\dot{\mathfrak{h}} \equiv (\dot{\mathfrak{R}} \operatorname{grad})\, \mathfrak{h}$ ersetzen durch $\alpha (\mathfrak{h} \operatorname{grad})\, \mathfrak{h}$. Statt einer Dgl. 2. Ordnung hat man also jetzt nur noch eine Dgl. 1. Ordnung zu lösen, was natürlich eine wesentliche Vereinfachung bedeutet. (Genau genommen hat man zwei Dgln. 1. Ordnung, nämlich Gl. (5) und Gl. (5a), die eine davon kann man jedoch durch einfache Quadratur lösen.)

Von Interesse ist noch die zeitliche Änderung des Momentes M. Diese ergibt sich aus dem Energiesatz; denn da ωa die Geschwindigkeit ist, mit der sich das Teilchen um die Magnetfeldlinien dreht, ist bis auf kleine Größen

$$\dot{\mathfrak{r}}^2 = \dot{\mathfrak{R}}^2 + \omega^2 a^2 = \text{const}$$

oder

$$2\, \dot{\mathfrak{R}}\, \ddot{\mathfrak{R}} + \dot{\omega}\, (\omega a^2) + \omega\, (\omega a^2)^{\cdot} = 0.$$

Wegen $\dot{H} = (\dot{\mathfrak{R}} \operatorname{grad} H)$ ergibt Einsetzen von Gl. (4) für $\ddot{\mathfrak{R}}$

$$\dot{M} = 0\,,$$

also

$$M = \text{const.}$$

Die anschauliche Herleitung der Näherungsgleichungen hat den Nachteil, daß man nicht recht sieht, wie groß die Fehler, die man macht, eigentlich sind und wie man diese durch Verbesserung der Näherung verringern kann. Ein wirkliches Moment ist ja bei einer irgendwie auseinandergezogenen Spirale auch gar nicht mehr definiert (allenfalls im zeitlichen Mittel). Ein Verfahren, das diesen Nachteil nicht haben soll, muß direkt von der Bewegungsgleichung des wirklichen Teilchens ausgehen.

§ 1. Erste Näherung der mittleren Bahn

Wir behandeln die Dgl.

$$m\, \ddot{\mathfrak{r}} = \frac{e}{c} [\dot{\mathfrak{r}}\, \mathfrak{H}(\mathfrak{r})] + \mathfrak{K}(\mathfrak{r}) \qquad (1{,}1)$$

unter der Voraussetzung

(I) daß $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ „schwach veränderlich" sind. D. h. daß die *totale* zeitliche Änderung von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ $\big((\dot{\mathfrak{r}} \operatorname{grad})\, \mathfrak{H} + \partial \mathfrak{H}/\partial t$ bzw. $(\mathfrak{r} \operatorname{grad})\, \mathfrak{K} + \partial \mathfrak{K}/\partial t\big)$ innerhalb der Zeit $1/\omega$ (ω = Larmor-Frequenz) klein ist gegen den Betrag von $\mathfrak{H}$ bzw. $\mathfrak{K}$, und diese Änderung außerdem genügend gut durch das erste Glied einer Taylor-Entwicklung beschrieben wird. $\big((1/H^2)\, |1/\omega\, \dot{\mathfrak{H}}\,|^2$, $(1/H)\, |1/\omega^2\, \ddot{\mathfrak{H}}\,|$ und entsprechende Ausdrücke für $\mathfrak{K}$ werden als Größen 2. Ordnung behandelt, in diesem Paragraphen also gegen 1 vernachlässigt.$\big)$ Zu dieser einen Voraussetzung werden weiter unten noch zwei weitere treten.

Für verschwindende Kraft $\mathfrak{K}$ und konstantes Magnetfeld $\mathfrak{H}$ wird Gl. (1) allgemein gelöst durch

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{R} + \mathfrak{a} \sin \omega t + \mathfrak{a}' \cos \omega t, \qquad (1{,}2)$$

wo $\dot{\mathfrak{R}} = \text{const} \cdot \mathfrak{h}$ ist und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ zwei konstante Vektoren von gleichem Betrage sind, die mit $\mathfrak{h}$ in der Reihenfolge $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{h}$ ein Rechtssystem bilden.

Für nichtverschwindende, schwach veränderliche Kraft, sowie schwach veränderliches Magnetfeld machen wir zur Lösung von Gl. (1) den Ansatz:

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}(t) = \mathfrak{R}(t) &+ \mathfrak{a}(t) \sin \Phi(t) \;\; + \mathfrak{a}'(t) \cos \Phi(t) \\ &+ \mathfrak{b}(t) \sin \Phi(t) \;\; + \mathfrak{b}'(t) \cos \Phi(t) \qquad (1{,}3) \\ &+ \mathfrak{c}(t) \sin 2\,\Phi(t) + \mathfrak{c}'(t) \cos 2\,\Phi(t) \end{aligned}$$

mit

$$\Phi(t) = \int_{t_0}^{t} \{\omega\big(\mathfrak{R}(t')\big) + \omega^*(t')\}\, \mathrm{d}t' + \Phi_0 \qquad (1{,}3\,\mathrm{a})$$

und

$$\omega(\mathfrak{R}) = \frac{e}{mc} H(\mathfrak{R})\,. \qquad (1{,}3\,\mathrm{b})$$

Von $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ müssen wir jetzt zulassen, daß sie Funktionen der Zeit sind. Jedoch soll in jedem Augenblick

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_0', \mathfrak{h}\,(\mathfrak{R}) \text{ ein Rechtssystem,}\\ &|\,\mathfrak{a}\,| = |\,\mathfrak{a}'\,| = a\,(t)\\ \text{und}\quad &(\dot{\mathfrak{a}}_0\,\mathfrak{a}_0') = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1,3c}$$

sein, wenn $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}/a$ ist.

$\mathfrak{b}, \mathfrak{b}', \mathfrak{c}, \mathfrak{c}'$ und ω^* sind eine Reihe von willkürlichen Größen, die weiter unten geeignet festzulegen sind. (Wenn im folgenden von „willkürlichen Vektoren" geredet wird, ist damit außer den Vektoren $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}, \mathfrak{c}'$ auch ω^* gemeint). Wir nehmen jedoch an, daß $|\,\mathfrak{b}\,|, |\,\mathfrak{b}'\,|, |\,\mathfrak{c}\,|, |\,\mathfrak{c}'\,|$ klein von 1. Ordnung gegen a und ω^* klein von 1. Ordnung gegen ω ist, sowie daß $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}', \mathfrak{b}, \ldots$ schwach veränderliche Funktionen der Zeit sind. Die Berechtigung dieser Annahme ist nach Berechnung der willkürlichen Vektoren und der Abhängigkeit der Größe a von der Zeit zu zeigen. Dazu ist notwendig, daß wir über $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ noch die Voraussetzungen

$$\text{(II)}\qquad \begin{aligned} &|\,\dot{\mathfrak{R}}\,|\,|\,(\mathfrak{a}_0 \text{ grad})\,\mathfrak{H}\,| \ll \omega H,\\ &|\,\dot{\mathfrak{R}}\,|\,|\,(\mathfrak{a}_0' \text{ grad})\,\mathfrak{H}\,| \ll \omega H \end{aligned}$$

und

$$\text{(III)}\qquad \begin{aligned} &|\,(\mathfrak{a}_0 \text{ grad})\,\mathfrak{K}\,| \ll m\omega^2,\\ &|\,(\mathfrak{a}_0' \text{ grad})\,\mathfrak{K}\,| \ll m\omega^2 \end{aligned}$$ machen.

Die Voraussetzungen (I) und (II) ergeben sich aus einer Forderung, deren Notwendigkeit leicht einzusehen ist. Die Kräfte $e/c\,[\dot{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{H}\,(\mathfrak{r})]$ und $e/c\,[\dot{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{H}\,(\mathfrak{R})]$ dürfen nämlich nicht wesentlich verschieden sein, wenn eine von der Lösung im homogenen Feld ausgehende Näherung überhaupt sinnvoll sein soll. Die Ungleichung

$$|\,[\dot{\mathfrak{r}}\,\{\mathfrak{H}\,(\mathfrak{r}) - \mathfrak{H}\,(\mathfrak{R})\}]\,| \ll |\,[\dot{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{H}\,(\mathfrak{r})]\,|$$

ist aber tatsächlich erfüllt, wenn (I) und (II) erfüllt sind. Die Voraussetzung (III) bedeutet, daß die Änderung von $\mathfrak{K}$ längs des Larmor-Radius' klein gegen die magnetische Kraft ist.

Wir setzen jetzt in Gl. (1) für $\mathfrak{H}\,(\mathfrak{r})$ und $\mathfrak{K}\,(\mathfrak{r})$ eine Taylor-Entwicklung um den Punkt $\mathfrak{R}$[5] und für $\dot{\mathfrak{r}}, \ddot{\mathfrak{r}}$ den Ansatz Gl. (3) ein, wobei Größen 2. Ordnung vernachlässigt werden. Das Ergebnis ist die Dgl.

$$\begin{aligned} &m\,\ddot{\mathfrak{R}} - m\,(\dot{\omega}\,\mathfrak{a}' + 2\,\omega\,\dot{\mathfrak{a}}' + \omega^2\mathfrak{a} + 2\,\omega\omega^*\,\mathfrak{a})\sin + m\,(\omega\,\mathfrak{a} + 2\,\omega\,\dot{\mathfrak{a}} - \omega^2\mathfrak{a}' - 2\,\omega\omega^*\,\mathfrak{a}')\cos - m\,\omega^2\mathfrak{b}\sin\\ &- m\,\omega^2\mathfrak{b}'\cos - 4\,m\,\omega^2\,\mathfrak{c}\sin 2 - 4\,m\,\omega^2\,\mathfrak{c}'\cos 2\\ &= \frac{e}{c}\,[\dot{\mathfrak{R}}\,\mathfrak{H}\,(\mathfrak{R})] + \frac{e}{c}\,[\dot{\mathfrak{R}}\,(\mathfrak{a}\text{ grad})\,\mathfrak{H}]\sin + \frac{e}{c}\,[\dot{\mathfrak{R}}\,(\mathfrak{a}'\text{ grad})\,\mathfrak{H}]\cos + \frac{e}{c}\,[\dot{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{H}]\sin - \frac{e}{c}\,\omega^*\,[\mathfrak{a}'\,\mathfrak{H}]\sin\\ &- \frac{e}{c}\,\omega\,[\mathfrak{a}'\,\mathfrak{H}]\sin - \frac{e}{c}\,\omega\,[\mathfrak{a}'\,(\mathfrak{a}\text{ grad})\,\mathfrak{H}]\sin^2 - \frac{e}{c}\,\omega\,[\mathfrak{a}'\,(\mathfrak{a}'\text{ grad})\,\mathfrak{H}]\sin\cos + \frac{e}{c}\,[\dot{\mathfrak{a}}'\,\mathfrak{H}]\cos\\ &+ \frac{e}{c}\,\omega^*\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{H}]\cos + \frac{e}{c}\,\omega\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{H}]\cos + \frac{e}{c}\,\omega\,[\mathfrak{a}\,(\mathfrak{a}\text{ grad})\,\mathfrak{H}]\sin\cos + \frac{e}{c}\,\omega\,[\mathfrak{a}\,(\mathfrak{a}'\text{ grad})\,\mathfrak{H}]\cos^2 + \frac{e}{c}\,\omega\,[\mathfrak{b}\,\mathfrak{H}]\cos\\ &- \frac{e}{c}\,\omega\,[\mathfrak{b}'\,\mathfrak{H}]\sin + 2\,\frac{e}{c}\,\omega\,[\mathfrak{c}\,\mathfrak{H}]\cos 2 - 2\,\frac{e}{c}\,\omega\,[\mathfrak{c}'\,\mathfrak{H}]\sin 2 + \mathfrak{K}\,(\mathfrak{R}) + (\mathfrak{a}\text{ grad})\,\mathfrak{K}\sin + (\mathfrak{a}'\text{ grad})\,\mathfrak{K}\cos. \end{aligned} \tag{1,4}$$

Das Argument Φ der Winkelfunktionen schreiben wir, sofern keine Verwechslung möglich ist, nicht hin.

Die willkürlichen Vektoren werden jetzt durch die Forderung festgelegt, daß die in Gl. (4) *explizit* auftretenden schnell veränderlichen Glieder verschwinden sollen. Dazu ist notwendig, daß nach Zusammenfassung der schnell veränderlichen Glieder die Koeffizienten vor sin [Gl. (5a)], cos [Gl. (5b)] und sin·cos [Gl. (7a)] verschwinden und der Koeffizient vor dem Glied sin² gleich ist dem Koeffizienten vor dem Glied cos² [Gl. (7b)]. (sin 2 wird zerlegt in 2·sin cos und cos 2 in cos²—sin²). Das ergibt die Gleichungen

$$\mathfrak{b} - [\mathfrak{b}'\,\mathfrak{h}] = \mathfrak{v}, \tag{1,5a}$$

$$\mathfrak{b}' + [\mathfrak{b}\,\mathfrak{h}] = \tilde{\mathfrak{v}} \tag{1,5b}$$

mit

$$\begin{aligned} \mathfrak{v} = &-\frac{\omega^*}{\omega}\,a\,\mathfrak{a}_0 - \left(\frac{\dot a}{\omega} + \frac{\dot\omega}{\omega^2}\,a\right)\mathfrak{a}_0' + \frac{2\,a}{\omega}\,(\dot{\mathfrak{h}}\,\mathfrak{a}_0')\,\mathfrak{h}\\ &-\frac{a}{\omega H}\,[\dot{\mathfrak{R}}\,(\mathfrak{a}_0\text{ grad})\,\mathfrak{H}] - \frac{a}{m\,\omega^2}\,(\mathfrak{a}_0\text{ grad})\,\mathfrak{K}\,, \end{aligned} \tag{1,6a}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{v}} = &\left(\frac{\dot a}{\omega} + \frac{\dot\omega}{\omega^2}\,a\right)\mathfrak{a}_0 - \frac{\omega^*}{\omega}\,a\,\mathfrak{a}_0' - \frac{2\,a}{\omega}\,(\dot{\mathfrak{h}}\,\mathfrak{a}_0)\,\mathfrak{h}\\ &-\frac{a}{\omega H}\,[\dot{\mathfrak{R}}\,(\mathfrak{a}_0'\text{ grad})\,\mathfrak{H}] - \frac{a}{m\,\omega^2}\,(\mathfrak{a}_0'\text{ grad})\,\mathfrak{K} \end{aligned} \tag{1,6b}$$

und

$$2\,\mathfrak{c} - [\mathfrak{c}'\mathfrak{h}] = \mathfrak{w}, \tag{1,7a}$$

$$2\,\mathfrak{c}' + [\mathfrak{c}\,\mathfrak{h}] = \tilde{\mathfrak{w}} \tag{1,7b}$$

[5] Die starke Konvergenz dieser Entwicklung wird, wovon man sich leicht überzeugt, bereits durch Voraussetzung (I) gefordert.

mit

$$\mathfrak{w} = -\frac{a^2}{4\,H}\{[\,\mathfrak{a}_0\,(\mathfrak{a}_0\,\mathrm{grad})\,\mathfrak{H}] - [\mathfrak{a}_0'\,(\mathfrak{a}_0'\,\mathrm{grad})\,\mathfrak{H}]\}, \tag{1,8a}$$

$$\tilde{\mathfrak{w}} = -\frac{a^2}{4\,H}\{[\mathfrak{a}_0\,(\mathfrak{a}_0'\,\mathrm{grad})\,\mathfrak{H}] + [\mathfrak{a}_0'\,(\mathfrak{a}_0\,\mathrm{grad})\,\mathfrak{H}]\}. \tag{1,8b}$$

Die Zusammenfassung der Glieder mit $\sin^2$ und $\cos^2$ ergibt in Gl. (4) ein schwach veränderliches Glied $\mathfrak{K}^{(\mathrm{mag})}$. Und zwar ist

$$\mathfrak{K}^{(\mathrm{mag})} = -2\,\frac{e\,H}{c}\,\omega\,\{2\,\mathfrak{c}' + [\mathfrak{c}\,\mathfrak{h}]\} - \frac{e\,\omega}{c}\,a^2\,[\mathfrak{a}_0'\,(\mathfrak{a}_0\,\mathrm{grad})\,\mathfrak{H}] \tag{1,9}$$

der Koeffizient vor dem Glied $\sin^2$. Die Gln. (5) sind sechs Gleichungen für die acht Unbekannten $(\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}_0), \ldots, (\mathfrak{b}'\mathfrak{a}_0), \ldots, \omega^*$ und $\dot{a}$. Wir setzen $(\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}_0')$ und $(\mathfrak{b}'\mathfrak{a}_0')$ willkürlich gleich Null[6]. Die willkürlichen Vektoren sind jetzt aus Gl. (5) und Gl. (7) berechenbar; das Ergebnis dieser Rechnung ist in den Gln. (2,1) bis (2,5) angegeben.

Wegen $[\mathfrak{b}\,\mathfrak{h}]\,\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{b}\,[\mathfrak{h}\,\mathfrak{a}_0] = (\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}_0')$ und weiteren ganz entsprechenden Gleichungen folgt aus Gl. (5)

$$(\mathfrak{v}\,\mathfrak{a}_0') = \quad (\tilde{\mathfrak{v}}\,\mathfrak{a}_0), \tag{1,10a}$$

$$(\mathfrak{v}\,\mathfrak{a}_0) = -(\tilde{\mathfrak{v}}\,\mathfrak{a}_0'). \tag{1,10b}$$

Aus den Gln. (9) und (7b) folgt

$$\mathfrak{K}^{(\mathrm{mag})} = -\frac{e}{2\,c}\,\omega\,a^2\,\{[\mathfrak{a}_0'\,(\mathfrak{a}_0\,\mathrm{grad})\,\mathfrak{H}] - [\mathfrak{a}_0\,(\mathfrak{a}_0'\,\mathrm{grad})\,\mathfrak{H}]\},$$

oder wegen

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{H} \equiv \mathfrak{a}_0\,(\mathfrak{a}_0\,\mathrm{grad})\,\mathfrak{H} + \mathfrak{a}_0'\,(\mathfrak{a}_0'\,\mathrm{grad})\,\mathfrak{H} + \mathfrak{h}\,(\mathfrak{h}\,\mathrm{grad})\,\mathfrak{H} = 0:$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}^{(\mathrm{mag})}\,\mathfrak{a}_0 &= -M\,[\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{a}_0']\,(\mathfrak{a}_0\,\mathrm{grad})\,\mathfrak{H} \\ &= -M\,(\mathfrak{a}_0\,\mathrm{grad}\,H), \\ \mathfrak{K}^{(\mathrm{mag})}\,\mathfrak{a}_0' &= -M\,[\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{a}_0']\,(\mathfrak{a}_0'\,\mathrm{grad})\,\mathfrak{H} \\ &= -M\,(\mathfrak{a}_0'\,\mathrm{grad}\,H), \\ \mathfrak{K}^{(\mathrm{mag})}\,\mathfrak{h} &= M\,\{\mathfrak{a}_0'\,(\mathfrak{a}_0'\,\mathrm{grad})\,\mathfrak{H} + \mathfrak{a}_0\,(\mathfrak{a}_0\,\mathrm{grad})\,\mathfrak{H}\} \\ &= -M\,(\mathfrak{h}\,\mathrm{grad}\,H) \end{aligned} \tag{1,11}$$

in Übereinstimmung mit Gl. (E, 3a).

Nach der erwähnten Festlegung der willkürlichen Vektoren geht Gl. (4) also über in

$$m\,\ddot{\mathfrak{R}} = \frac{e}{c}\,[\dot{\mathfrak{R}}\,\mathfrak{H}\,(\mathfrak{R})] + \mathfrak{K}\,(\mathfrak{R}) + \mathfrak{K}^{(\mathrm{mag})} \tag{1,12}$$

mit

$$\mathfrak{K}^{(\mathrm{mag})} = -M\;\mathrm{grad}\,H \tag{1,13}$$

und

$$M = \frac{e}{2\,c}\,\omega\,a^2. \tag{1,13a}$$

Für die praktische Rechnung streichen wir die schnell veränderlichen Glieder 1. Ordnung in Gl. (3), so daß jetzt eine spezielle Lösung von Gl. (1) mit einer Lösung von Gl. (12) durch

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{R} + \mathfrak{a}\,\sin\int_{t_0}^{t}\{\omega\,(\mathfrak{R}\,(t')) + \omega^*\,(t')\}\,\mathrm{d}\,t' + \mathfrak{a}'\,\cos\int_{t_0}^{t}\{\omega\,(\mathfrak{R}\,(t')) + \omega^*\,(t')\}\,\mathrm{d}\,t' \tag{1,14}$$

verknüpft ist. Durch geeignete Wahl der drei Anfangswerte von a, Φ (der Wert von Φ hängt ab von der vorher willkürlich festgelegten Richtung von $\mathfrak{a}_0$ bzw. $\mathfrak{a}_0'$) und α läßt sich erreichen, daß die Verknüpfung mit derjenigen Lösung von Gl. (12) stattfindet, die zugleich (näherungsweise) Lösung der um drei willkürliche Konstanten ärmeren Dgl. 1. Ordnung

$$\dot{\mathfrak{R}} = \alpha\,\mathfrak{h} - \frac{c}{e\,H}\,[\mathfrak{h}\,\{\mathfrak{K} - M\;\mathrm{grad}\,H - m\,\alpha\,\dot{\mathfrak{h}}\}] \tag{1,15}$$

mit

$$m\,\dot{\alpha} = \mathfrak{h}\,(\mathfrak{K} - M\;\mathrm{grad}\,H), \tag{1,15a}$$

ist, wenn $\mathfrak{K}$ (was nicht wesentlich ist, sondern nur die Gln. (15) und (15a) vereinfacht) als klein vorausgesetzt wird.

Man überzeugt sich durch Einsetzen von Gl. (15) in Gl. (14), daß jede Lösung von Gl. (15) bis auf Größen 2. Ordnung auch eine Lösung von Gl. (14) ist.

Die zeitliche Änderung von M ergibt sich aus Gl. (10a) in Verbindung mit den Gln. (6a) und (6b). Es wird

$$-\omega a\dot{a} - \dot{\omega} a^2 - \frac{e}{mc}\,a^2\mathfrak{a}_0'\,[\dot{\mathfrak{R}}\,(\mathfrak{a}_0\,\mathrm{grad})\,\mathfrak{H}] - \frac{a^2}{m}\,\mathfrak{a}_0'\,(\mathfrak{a}_0\,\mathrm{grad})\,\mathfrak{K} = \omega a\dot{a} + \dot{\omega} a^2 - \frac{e}{mc}\,a^2\mathfrak{a}_0\,[\dot{\mathfrak{R}}\,(\mathfrak{a}_0'\,\mathrm{grad})\,\mathfrak{H}] - \frac{a^2}{m}\,\mathfrak{a}_0\,(\mathfrak{a}_0'\,\mathrm{grad})\,\mathfrak{K}$$

[6] Man kann sich überlegen, daß mit dieser willkürlichen Festlegung von $(\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}_0')$ und $(\mathfrak{b}'\,\mathfrak{a}_0')$ eine solche Änderung von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ verknüpft ist, daß der gesamte „spiralende" Anteil in Gl. (3) unabhängig von dieser Willkür ist.

oder

$$2\,\omega a\dot{a} + 2\,\dot{\omega} a^2 = \frac{e}{mc} a^2\, \dot{\mathfrak{R}}\, \{[\mathfrak{a}_0' (\mathfrak{a}_0 \operatorname{grad}) \mathfrak{H}] - [\mathfrak{a}_0 (\mathfrak{a}_0' \operatorname{grad}) \mathfrak{H}]\} - \frac{a^2}{m} \{\mathfrak{a}_0' (\mathfrak{a}_0 \operatorname{grad}) \mathfrak{K} - \mathfrak{a}_0 (\mathfrak{a}_0' \operatorname{grad}) \mathfrak{K}\}$$
$$= \frac{e}{mc} a^2\, \dot{\mathfrak{R}} \operatorname{grad} H - \frac{a^2}{m} (\mathfrak{h} \operatorname{rot} \mathfrak{K}).$$

Setzen wir hier $\dot{\mathfrak{R}} \operatorname{grad} H = \dot{H} - \partial H/\partial t$ ein, dann wird wegen $\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -1/c \cdot \partial \mathfrak{H}/\partial t$

$$2\,\omega a\dot{a} + \dot{\omega} a^2 = -\frac{a^2}{m} (\mathfrak{h} \operatorname{rot} \mathfrak{K}^{(\mathrm{mech})}), \quad (1{,}16)$$

wo $\mathfrak{K}^{(\mathrm{mech})} = \mathfrak{K} - e\mathfrak{E}$ gesetzt worden ist. Aus den Gln. (16) und (12a) folgt:

$$\dot{M} = -\frac{M}{m} (\mathfrak{h} \operatorname{rot} \mathfrak{K}^{(\mathrm{mech})}). \quad (1{,}17)$$

Bei verschwindender Rotation der mechanischen Kräfte bleibt also M in 1. Näherung konstant.

§ 2. Berechnung der zeitlichen Änderung von M in 2. Näherung

Die 2. Näherung der Teilchenbahn wird ganz analog zur vorstehenden 1. Näherung gewonnen werden. Das wesentliche Ergebnis wird sein, daß das Moment bei verschwindender Rotation der mechanischen Kräfte auch noch in 2. Näherung konstant bleibt.

Zuerst seien die Werte von $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$ und $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}'$, wie sie sich aus Gl. (1,5) bzw. Gl. (1,7) ergeben, explizit angegeben.

$$\left.\begin{aligned}
(\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}_0) &= -\frac{a\omega^*}{\omega} + \frac{a}{\omega H} \dot{\mathfrak{R}} [\mathfrak{a}_0 (\mathfrak{a}_0 \operatorname{grad}) \mathfrak{H}] \\
&\qquad - \frac{a}{m\omega^2} \mathfrak{a}_0 (\mathfrak{a}_0 \operatorname{grad}) \mathfrak{K}, \\
(\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}_0') &= 0 \ \text{(willkürlich)}, \\
(\mathfrak{b}\,\mathfrak{h}) &= \frac{2a}{\omega} (\mathfrak{h}\,\dot{\mathfrak{a}}_0') + \frac{a}{\omega H} \dot{\mathfrak{R}} [\mathfrak{h} (\mathfrak{a}_0 \operatorname{grad}) \mathfrak{H}] \\
&\qquad - \frac{a}{m\omega^2} \mathfrak{h} (\mathfrak{a}_0 \operatorname{grad}) \mathfrak{K};
\end{aligned}\right\} \quad (2{,}1)$$

$$\left.\begin{aligned}
(\mathfrak{b}'\mathfrak{a}_0) &= -\frac{\dot{a}}{\omega} + \frac{a}{\omega H} \dot{\mathfrak{R}} [\mathfrak{a}_0 (\mathfrak{a}_0' \operatorname{grad}) \mathfrak{H}] \\
&\qquad - \frac{a}{m\omega^2} \mathfrak{a}_0 (\mathfrak{a}_0' \operatorname{grad}) \mathfrak{K}, \\
(\mathfrak{b}'\mathfrak{a}_0') &= 0 \ \text{(willkürlich)}, \\
(\mathfrak{b}'\mathfrak{h}) &= -\frac{2a}{\omega} (\mathfrak{h}\,\dot{\mathfrak{a}}_0) + \frac{a}{\omega H} \dot{\mathfrak{R}} [\mathfrak{h} (\mathfrak{a}_0' \operatorname{grad}) \mathfrak{H}] \\
&\qquad - \frac{a}{m\omega^2} \mathfrak{h} (\mathfrak{a}_0' \operatorname{grad}) \mathfrak{K};
\end{aligned}\right\} \quad (2{,}2)$$

$$\left.\begin{aligned}
(\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}_0) &= \frac{a^2}{4H} (\mathfrak{a}_0' \operatorname{grad} H), \\
(\mathfrak{c}\mathfrak{a}_0') &= \frac{a^2}{4H} (\mathfrak{a}_0 \operatorname{grad} H), \\
(\mathfrak{c}\,\mathfrak{h}) &= -\frac{a^2}{8H} \{\mathfrak{a}_0' (\mathfrak{a}_0 \operatorname{grad}) \mathfrak{H} + \mathfrak{a}_0 (\mathfrak{a}_0' \operatorname{grad}) \mathfrak{H}\};
\end{aligned}\right\} \quad (2{,}3)$$

$$\left.\begin{aligned}
(\mathfrak{c}'\mathfrak{a}_0) &= -\frac{a^2}{4H} (\mathfrak{a}_0 \operatorname{grad} H), \\
(\mathfrak{c}'\mathfrak{a}_0') &= \frac{a^2}{4H} (\mathfrak{a}_0' \operatorname{grad} H), \\
(\mathfrak{c}'\mathfrak{h}) &= -\frac{a^2}{8H} \{\mathfrak{a}_0' (\mathfrak{a}_0' \operatorname{grad}) \mathfrak{H} - \mathfrak{a}_0 (\mathfrak{a}_0 \operatorname{grad}) \mathfrak{H}\};
\end{aligned}\right\} \quad (2{,}4)$$

ω^* ergibt sich aus den Gln. (1,10b) und (1,6) zu

$$\omega^* = \frac{1}{2H} \dot{\mathfrak{R}} \{[\mathfrak{a}_0 (\mathfrak{a}_0 \operatorname{grad}) \mathfrak{H}] + [\mathfrak{a}_0' (\mathfrak{a}_0' \operatorname{grad}) \mathfrak{H}]\}$$
$$- \frac{1}{2m\omega} \{\mathfrak{a}_0 (\mathfrak{a}_0 \operatorname{grad}) \mathfrak{K} + \mathfrak{a}_0' (\mathfrak{a}_0' \operatorname{grad}) \mathfrak{K}\}. \quad (2{,}5)$$

Zur Lösung der Bewegungsgl. (1,1) machen wir jetzt den erweiterten Ansatz

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{R} + \mathfrak{a} \sin \Phi + \mathfrak{a}' \cos \Phi + \mathfrak{b} \sin \Phi + \mathfrak{b}' \cos \Phi \quad (2{,}6)$$
$$+ \mathfrak{c} \sin 2\,\Phi + \mathfrak{c}' \cos 2\,\Phi + \mathfrak{d} \sin 3\,\Phi + \mathfrak{d}' \cos 3\,\Phi$$

mit

$$\Phi = \int_{t_0}^{t} \{\omega (\mathfrak{R}(t')) + \omega^*(t')\}\, dt' + \Phi_0. \quad (2{,}6\mathrm{a})$$

Über $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}'$ und ω^* machen wir dieselben Annahmen wie im Paragraphen 1; von den Vektoren $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}'$ nehmen wir an, daß sie schwach veränderlich sind und daß ihre Beträge klein von 2. Ordnung gegen a sind.

Die Taylor-Entwicklung für $\mathfrak{H}$ lautet:

$$\mathfrak{H}(\mathfrak{r}) = \mathfrak{H}(\mathfrak{R}) + (\{\mathfrak{r} - \mathfrak{R}\} \operatorname{grad}) \mathfrak{H}$$
$$+ \frac{1}{2} \{\mathfrak{r} - \mathfrak{R}\} (\mathfrak{T}\,\mathfrak{H}) \{\mathfrak{r} - \mathfrak{R}\}, \quad (2{,}7)$$

wo $\mathfrak{T}$ der Tensor der zweiten örtlichen Ableitungen ist. Einsetzen von Gl. (6) in Gl. (7) ergibt bis auf Größen 3. Ordnung:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{H}(\mathfrak{r}) = \mathfrak{H}(\mathfrak{R}) &+ (\mathfrak{a} \operatorname{grad}) \mathfrak{H} \sin + (\mathfrak{a}' \operatorname{grad}) \mathfrak{H} \cos \\
&+ (\mathfrak{b} \operatorname{grad}) \mathfrak{H} \sin + (\mathfrak{b}' \operatorname{grad}) \mathfrak{H} \cos \quad (2{,}8) \\
&+ (\mathfrak{c} \operatorname{grad}) \mathfrak{H} \sin 2 + (\mathfrak{c}' \operatorname{grad}) \mathfrak{H} \cos 2 \\
&+ \frac{1}{2} \mathfrak{a} (\mathfrak{T}\,\mathfrak{H})\, \mathfrak{a} \sin^2 + \frac{1}{2} \mathfrak{a}' (\mathfrak{T}\,\mathfrak{H})\, \mathfrak{a}' \cos^2 \\
&\qquad + \mathfrak{a} (\mathfrak{T}\,\mathfrak{H})\, \mathfrak{a}' \sin \cos.
\end{aligned}$$

In dieser und der entsprechenden Gleichung für $\mathfrak{K}(\mathfrak{r})$ werden die Vektoren $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}'$ durch die in 1. Näherung gewonnenen Werte dieser Vektoren ersetzt, der dadurch entstehende Fehler ist von 3. Ordnung. Die so entstandenen Ausdrücke für $\mathfrak{H}(\mathfrak{r})$ und $\mathfrak{K}(\mathfrak{r})$ und die zeitlichen Ableitungen von $\mathfrak{r}$, wie sie aus Gl. (6) zu gewinnen sind, werden in die Bewegungsgleichung Gl. (1,1) eingesetzt. Die jetzt in der Bewegungsgleichung auftretenden Winkelfunktionen lassen sich in sieben linear unabhängige Winkelfunktionen zerlegen. Die Forderung, daß die explizit auftretenden Winkelfunktionen aus der Gleichung verschwinden sollen, liefert Gleichungen, durch die die weiteren Näherungen der willkürlichen Vektoren und der zeitlichen Änderung von a festgelegt sind. Die recht langwierige Rechnung soll hier nicht explizit angegeben werden.

Durch dieselbe Überlegung wie in § 1 ergibt sich für rot $\mathfrak{K}^{(\mathrm{mech})} = 0$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\omega a^2 + 2\,\omega^*\, a^2 + a\omega\,(\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}_0)\right) = 0,$$

also

$$M = \text{const} + \text{Größen 1. Ordnung.}$$

Die Berechnung weiterer Näherungen in Fortsetzung dieses Verfahrens erscheint wegen der wachsenden Zahl der Glieder nicht lohnend, zumal die Konvergenz dieser Approximation zweifelhaft ist.

§ 3. Die relativistischen Näherungsgleichungen

Wir bedienen uns in diesem Paragraphen der Indizes-Schreibweise, mit der Vorschrift, daß über gleiche Indizes zu summieren ist, wenn sie in gleichen Gliedern auftreten. Ein Strich vor einem Index bedeutet Differentiation nach der entsprechenden Koordinate.

Die Bewegungsgleichung lautet jetzt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\, m_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\, x_i = \frac{e}{c}\, F_{ik} \frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}\tau}\,; \tag{3,1}$$

x_i ist der Vierervektor ($\mathfrak{r}$; ict); F_{ik} ist der Tensor

$$\begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}.$$

τ ist die durch

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}\tau} = -c^2 \tag{3,2}$$

definierte Eigenzeit des Teilchens. Sucht man Gl. (1) bei konstantem F_{ik} durch einen Exponentialansatz zu lösen, so wird man darauf geführt, die Eigenwerte und Eigenvektoren von $(e/m_0 c) F_{ik}$ zu bestimmen. Die übliche Rechnung ergibt als Eigenwerte $+\nu$, $-\nu$, $+i\omega$ und $-i\omega$, wo

$$\left.\begin{aligned} &\nu = \frac{e}{m_0 c}\,\bar{\nu} \text{ und } \omega = \frac{e}{m_0 c}\,\bar{\omega} \\ &\text{mit} \\ &\bar{\nu} = \sqrt{-\frac{H^2 - E^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(H^2 - E^2)^2 + 4\,(\mathfrak{E}\,\mathfrak{H})^2}} \\ &\text{und} \\ &\bar{\omega} = \sqrt{\frac{H^2 - E^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(H^2 - E^2)^2 + 4\,(\mathfrak{E}\,\mathfrak{H})^2}} \end{aligned}\right\} \tag{3,3}$$

gesetzt ist ($\bar{\nu}$ und $\bar{\omega}$ sind reell). Die zugehörigen Eigenvektoren nennen wir $a^{+\nu}$, $a^{-\nu}$, $a^{+\omega}$ und $a^{-\omega}$. $a^{+\nu}$ und $a^{-\nu}$ sind „reell", wenn wir als reell einen solchen Vierervektor bezeichnen, der drei reelle räumliche und eine rein imaginäre zeitliche Komponente hat. $a^{+\omega}$ und $a^{-\omega}$ sind „komplex".

Für *konstantes* F_{ik} können wir jetzt die allgemeine Lösung in der Form

$$x_i = X_i + a_i \sin\omega\tau + a_i' \cos\omega\tau \tag{3,4}$$

schreiben, wenn

$$\frac{\mathrm{d}X_i}{\mathrm{d}\tau} = a_i^{+\nu}\cdot\exp(\nu\tau) + a_i^{-\nu}\cdot\exp(-\nu\tau) \tag{3,4a}$$

ist. a_i ist ein beliebiger konstanter *reeller* Vektor aus der von $a^{+\omega}$ und $a^{-\omega}$ aufgespannten Ebene. a_i' ist definiert durch die Gleichung

$$F_{ik} a_k = -\bar{\omega}\, a_i',$$

aus welcher

$$F_{ik} a_k' = \bar{\omega}\, a_i \tag{3,5}$$

folgt, wie man sieht, wenn man a_i und a_i' nach den Eigenvektoren $a^{+\omega}$ und $a^{-\omega}$ zerlegt. Aus Gl. (5) folgt wegen $F_{ik} = -F_{ki}$

$$a_i a_i' = 0,\; a_i a_i = a_i' a_i'. \tag{3,6}$$

Für *schwach veränderliches* F_{ik} machen wir zur Lösung von Gl. (1) den Ansatz

$$\begin{aligned} x_i = X_i &+ a_i \sin\Phi + a_i' \cos\Phi + b_i \sin\Phi \\ &+ b_i' \cos\Phi + c_i \sin 2\,\Phi + c_i' \cos 2\,\Phi \end{aligned} \tag{3,7}$$

mit

$$\Phi = \int_{\tau_0}^{\tau} \{\omega\,(X(\tau')) + \omega^*(\tau')\}\,\mathrm{d}\tau' + \Phi_0.$$

In jedem Augenblick soll a_i, a_i' die Gln. (5) befriedigen und $\dot{a}_i a_i' = 0$ sein. Von den Vektoren b_i, b_i', c_i und c_i' nehmen wir wieder an, daß ihre Beträge klein gegen den Betrag von a_i sind, und von ω^*, daß es klein gegen ω ist.

Jetzt setzen wir Gl. (7) und die Taylor-Entwicklung

$$F_{ik}(x) = F_{ik}(X) + a_l F_{ik|l} \sin\Phi + a_l' F_{ik|l} \cos\Phi \tag{3,8}$$

in Gl. (1) ein und vernachlässigen Größen 2. Ordnung. Die willkürlichen Vektoren legen wir durch die Forderung fest, daß die schnell veränderlichen Glieder aus der so entstandenen Dgl. verschwinden sollen. Auf diese Weise erhält man in völliger Analogie zur nichtrelativistischen Näherung im § 1 die Gleichungen

$$b_i - \frac{1}{\bar{\omega}} F_{ik}\, b_k' = v_i, \tag{3,9a}$$

$$b_i' + \frac{1}{\bar{\omega}} F_{ik}\, b_k = \tilde{v}_i\,, \tag{3,9b}$$

$$v_i = -\frac{1}{\omega\overline{\omega}}\{\dot{\overline{\omega}}\, a_i' + 2\,\overline{\omega}\, a_i' + \overline{\omega}\omega^* a_i + F_{ik}\,\dot{a}_k + a_l\, F_{ik|l}\,\dot{X}_k\}, \quad (3{,}10\,\text{a})$$

$$\widetilde{v}_i = -\frac{1}{\omega\overline{\omega}}\{-\dot{\overline{\omega}}\, a_i - 2\,\overline{\omega}\,\dot{a}_i + \overline{\omega}\omega^* a_i' + F_{ik}\,\dot{a}_k' + a_l'\, F_{ik|l}\,\dot{X}_k\}, \quad (3{,}10\,\text{b})$$

$$2\,c_i - \frac{1}{\overline{\omega}}\, F_{ik}\, c_k' = w_i, \quad (3{,}11\,\text{a})$$

$$2\,c_i' + \frac{1}{\overline{\omega}}\, F_{ik}\, c_k = \widetilde{w}_i, \quad (3{,}11\,\text{b})$$

$$w_i = -\frac{1}{4\overline{\omega}}\{a_l\, F_{ik|l}\, a_k - a_l'\, F_{ik|l}\, a_k'\}, \quad (3{,}12\,\text{a})$$

$$\widetilde{w}_i = -\frac{1}{4\overline{\omega}}\{a_l\, F_{ik|l}\, a_k' + a_l'\, F_{ik|l}\, a_k\}, \quad (3{,}12\,\text{b})$$

$$K_i^{(\text{mag})} = -2\, m_0\, \omega^2\, (2\, c_i' + \frac{1}{\overline{\omega}} F_{ik}\, c_k) - \frac{e}{c}\,\omega\, a_l\, F_{ik|l}\, a_k'. \quad (3{,}13)$$

Indem man b und b' in Komponenten nach a, a', $a^{+\nu}$ und $a^{-\nu}$ zerlegt, zeigt man, daß aus Gl. (9)

$$v_i\, a_i' = \widetilde{v}_i\, a_i, \quad (3{,}14\,\text{a})$$

$$v_i\, a_i = -\widetilde{v}_i\, a_i' \quad (3{,}14\,\text{b})$$

folgt. Die inneren Produkte $b_i a_i'$ und $b_i' a_i'$ können wieder willkürlich gleich Null gesetzt werden; die übrigen Vektoren ergeben sich dann eindeutig aus Gl. (9) und Gl. (11).

Aus den Gln. (11b), (12b) und (13) ergibt sich:

$$K_i^{(\text{mag})} = \frac{\omega\, e}{2\, c}\{a_l'\, a_k\, F_{ik|l} - a_l\, a_k'\, F_{ik|l}\}$$

oder

$$K_i^{(\text{mag})} = \frac{\omega\, e}{2\, c}\, a_l'\, a_k\,\{F_{ik|l} + F_{li|k}\}.$$

Unter Benutzung der Maxwellschen Gleichungen rot $\mathfrak{E} + 1/c\cdot\partial\mathfrak{H}/\partial t = 0$ und div $\mathfrak{H} = 0$ in Indizes-Schreibweise

$$F_{ik|l} + F_{kl|i} + F_{li|k} = 0$$

wird hieraus:

$$K_i^{(\text{mag})} = -\frac{\omega\, e}{2\, c}\, a_l'\, a_k\, F_{kl|i}$$

oder

$$K_i^{(\text{mag})} = -\frac{\omega\, e}{2\, c}\{a_k\,(F_{kl}\, a_l')_{|i} - a_k\, F_{kl}\, a_l'{}_{|i}\}.$$

Wegen Gl. (5) wird daraus schließlich:

$$K_i^{(\text{mag})} = -M\,\overline{\omega}_{|i} \quad (3{,}15)$$

mit

$$M = \frac{e}{2\, c}\,\omega\, a_k\, a_k. \quad (3{,}15\,\text{a})$$

Das Verschwinden der zeitlichen Änderung von M ergibt sich hier, wie bei der nichtrelativistischen Rechnung, aus den Gln. (10) und (14a), wenn man (vgl. Herleitung der Gl. (15))

$$a_l\, a_i'\, F_{ik|l} + a_l'\, a_i\, F_{ik|l} = -\omega_{|k}\, a_l\, a_l$$

und

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \omega_{|k}\,\frac{dX_k}{d\tau}$$

berücksichtigt. Gl. (1) ist jetzt übergegangen in:

$$\frac{d}{d\tau}\, m_0\,\frac{dX_i}{d\tau} = \frac{e}{c}\, F_{ik}\,\frac{dX_k}{d\tau} - M\,\overline{\omega}_{|i}. \quad (3{,}16)$$

Wenn man Gl. (16) als die relativistische Bewegungsgleichung des Ersatzteilchens auffassen will, muß man an Stelle der Eigenzeit τ des wirklichen Teilchens die Eigenzeit σ des Ersatzteilchens, definiert durch

$$\frac{dX_i}{d\sigma}\,\frac{dX_i}{d\sigma} = -c^2, \quad (3{,}17)$$

einführen. Wegen Gl. (2) und Gl. (17) ergibt sich aus

$$\frac{dx_i}{d\tau}\,\frac{dx_i}{d\tau} = \frac{dX_i}{d\tau}\,\frac{dX_i}{d\tau} + \frac{\omega^2}{c^2}\, a_i\, a_i$$

sofort

$$\left(\frac{d\sigma}{d\tau}\right)^2 = 1 + \frac{\omega^2}{c^2}\, a_i\, a_i. \quad (3{,}18)$$

Ersetzen wir in Gl. (16) die Differentiation nach τ durch diejenige nach σ, so erhalten wir als Bewegungsgleichung des Ersatzteilchens

$$\frac{d}{d\sigma}\, m\,\frac{dX_i}{d\sigma} = \frac{e}{c}\, F_{ik}\,\frac{dX_k}{d\sigma} - \widetilde{M}\,\overline{\omega}_{|i}, \quad (3{,}19)$$

wo

$$m = m_0\left(\frac{d\sigma}{d\tau}\right) = \sqrt{m_0^2 + 2\,\frac{m_0}{c^2}\, M\,\overline{\omega}}$$

und

$$\widetilde{M} = \frac{e}{2\, c}\,\widetilde{\omega}\, a_k\, a_k \ \text{ mit } \ \widetilde{\omega} = \frac{e}{m\, c}\,\overline{\omega}$$

gesetzt worden ist. Die Masse des Ersatzteilchens und dadurch auch das Moment $\widetilde{M}$ sind also schwach veränderliche Funktionen der Eigenzeit σ. Für die numerische Behandlung ist wegen $m_0 = \text{const}$ Gl. (16) besser geeignet als Gl. (19).

Die relativistische Behandlung hat gezeigt, daß es nicht der Betrag des Magnetfeldes ist, der eine besondere Rolle spielt, sondern die relativistische Invariante

$$\overline{\omega} = \sqrt{\frac{H^2 - E^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(H^2 - E^2)^2 + 4\,(\mathfrak{E}\,\mathfrak{H})^2}}\,.$$

§ 4. Beispiel und allgemeine Folgerungen aus den Näherungsgleichungen

a) Für *verschwindende Kraft* ($\mathfrak{K}^{(\text{mech})} \equiv 0$; $\mathfrak{E} \equiv 0$) folgt aus den nichtrelativistischen Gleichungen (1,12a), (1,14), (1,15), (1,15a) und (2,5):

$$\dot{\mathfrak{R}} = \alpha\,\mathfrak{h} + \frac{c}{e\,H}[\mathfrak{h}\,\{M \operatorname{grad} H + m\,\alpha\,\dot{\mathfrak{h}}\}] \tag{4,1}$$

mit

$$m\,\dot{\alpha} = -M\,(\mathfrak{h} \operatorname{grad} H), \tag{4,1 a}$$

$$\dot{\mathfrak{h}} = \alpha\,(\mathfrak{h} \operatorname{grad})\,\mathfrak{h} \tag{4,1 b}$$

und

$$M = \frac{e}{2\,c}\,\omega\,a^2 \tag{4,1 c}$$

sowie

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{R} + \mathfrak{a} \sin\Big(\int_{t_0}^{t} \omega \,\mathrm{d}t' + \Phi_0\Big) + \mathfrak{a}' \cos\Big(\int_{t_0}^{t} \omega\,\mathrm{d}t' + \Phi_0\Big). \tag{4,2}$$

$$\omega^* = \frac{1}{2\,H}\,\dot{\mathfrak{R}}\,\{[\mathfrak{a}_0\,(\mathfrak{a}_0 \operatorname{grad})\,\mathfrak{H}] + [\mathfrak{a}_0'\,(\mathfrak{a}_0' \operatorname{grad})\,\mathfrak{H}]\}$$
$$= -\frac{1}{2\,H}\,\dot{\mathfrak{R}}\,[\mathfrak{h} \operatorname{grad} H]$$

verschwindet in 1. Näherung, wenn man für $\dot{\mathfrak{R}}$ Gl. (1) einsetzt.

Mit Hilfe dieser Näherungsformeln wurde das spiralende Ende einer Bahn im magnetischen Dipolfeld berechnet. Dieselbe Bahn wurde auch nach dem numerischen Verfahren von Störmer berechnet[7]. In Abb. 3 ist die Projektion dieser Bahn in eine Meridianebene (Ebene, in der der Dipol liegt) aufgetragen. Da außer $\mathfrak{h}$ auch grad H und $(\mathfrak{h} \operatorname{grad})\,\mathfrak{h}$ wegen der Rotationssymmetrie des Dipolfeldes in der Meridianebene liegen, steht der Anteil von $\dot{\mathfrak{R}}$ [Gl. (1)], der senkrecht auf $\mathfrak{h}$ steht, auch senkrecht auf der Meridianebene, tritt also in Abb. 3 nicht in Erscheinung.

Wegen $M = \text{const}$ folgt aus Gl. (1 c) sofort

$$a^2 H = \text{const.} \tag{4,3}$$

D. h. der magnetische Fluß durch die Spirale bleibt konstant[8]. Tatsächlich liegt in Abb. 3 die Bahn zwischen zwei Feldlinien.

Weiterhin folgt, wie gleich gezeigt werden wird, aus der Konstanz von M bei verschwindender Kraft

$$\frac{\sin^2\vartheta}{H} = \text{const}, \tag{4,4}$$

wo ϑ der Winkel zwischen $\dot{\mathfrak{r}}$ und $\mathfrak{h}(\mathfrak{R})$ ist[9]. Die Richtigkeit dieser Beziehung läßt sich ebenfalls qualitativ leicht an Abb. 3 einsehen. Das Teilchen kommt von rechts in den Bereich immer größerer magnetischer Feldstärke; $\sin^2\vartheta$ nimmt zu, bis $\vartheta = 90^0$ geworden ist, dann muß das Teilchen wieder umkehren.

b) In dem allgemeineren Fall, $\mathfrak{K}^{(\mathrm{mech})} \equiv 0$, aber $\mathfrak{K} = e\,\mathfrak{E}$ und $E/H \ll v/c$, folgt aus den Gln. (1,14), (1,15) bis auf Größen 1. Ordnung die Gleichung

$$\dot{\mathfrak{r}} = \alpha\,\mathfrak{h} + \omega\,\mathfrak{a} \cos\Phi - \omega\,\mathfrak{a}' \sin\Phi,$$

aus der sofort

$$(\dot{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{a}_0)^2 + (\dot{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{a}_0')^2 = \omega^2 a^2 \tag{4,5}$$

folgt, andrerseits ist aber

$$(\dot{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{a}_0)^2 + (\dot{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{a}_0')^2 = v^2 \sin^2\vartheta,$$

so daß also, wegen Gl. (1,12 a)

$$\frac{\sin^2\vartheta}{H} = \frac{M}{W} \tag{4,6}$$

ist, wenn $W = m v^2/2$ die Energie des Teilchens ist. Aus Gl. (6) folgt, daß der Fermische Nachbeschleunigungsmechanismus mit einer isotropen Verteilung der Teilchengeschwindigkeiten nicht verträglich ist. Denn eine anfangs isotrope Verteilung würde bei wachsender Energie W der Teilchen zu einer Bevorzugung der Geschwindigkeitskomponente in Magnetfeldrichtung führen, wodurch überdies die Wirksamkeit des Beschleunigungsmechanismus beeinträchtigt würde. $\sin^2\vartheta/H$ ist nicht konstant. Es bleibt zu untersuchen, wieweit eine Änderung von M in höherer Näherung hieran etwas ändert.

Der Verfasser ist Herrn Prof. Dr. L. Biermann für die Anregung zu dieser Arbeit und seine wohlwollende Unterstützung zu großem Dank verpflichtet. Herrn Dr. A. Schlüter danke ich für viele wertvolle Diskussionen und seine ganz entscheidende Kritik.

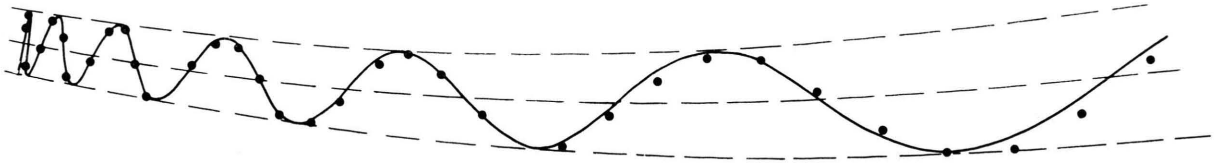

Abb. 3. Bahn in einem magnetischen Dipolfeld (Projektion auf die die Achse der Spirale enthaltende Meridianebene). ——— näherungsweise berechnete Bahn, ● ● ● ● nach Störmer berechnete Bahnpunkte, — — — — Magnetfeldlinien.

[7] Vgl. A. Schlüter, Solare Ultrastrahlung und Erdmagnetfeld. Z. Naturforschg. **6a**, 11 [1951]. Die fragliche Bahn ist in dieser Arbeit mit (14,4) bezeichnet.

[8] H. Alfvén, l. c.[3], p. 21.

[9] E. Fermi, On the origin of cosmic radiation, Phys. Rev. **75**, 1169 [1949].